خلاصه‌ی معادلات دیفرانسیل

معادله: معمولی $y' = \frac{dy}{dx}$ ، جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}$

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y$ ، خطی و غیر خطی

همگن و ناهمگن: همگن $f=0$ ، ناهمگن $f \neq 0$

جواب: 1) عمومی 2) خصوصی (مثل انتگرال معین) 3) استثنایی 4) کل

---

* معادله خطی جواب استثنایی ندارد

معادله‌ی دیفرانسیل از روی جواب:

1) به تعداد پارامترها مشتق می‌گیریم /

2) بین معادلات پارامترها را حذف می‌کنیم

---

* معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

1) جداشدنی (تفکیک پذیر): $f(x)dx = g(y)dy$ ← انتگرال گیری از طرفین

2) همگن ← $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{n} f(x,y)$ (n: درجه معادله)

↲ $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ←(شرط) P, Q هم درجه

↳ $y = ux$ → معادله جداشدنی

3) شبه همگن: $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

↲ حالت 1) دترمینان ضرایب $\neq 0$ ← (x_0, y_0) تلاقی دو خط ←

$U = x - x_0$

$V = y - y_0$

Scanned by CamScanner

حالت 2) دترمینان ضرایب = ۰ ←

$$\frac{t}{\ }\quad a_1x+b_1y+c_1=t$$
$$a_2x+b_2y+c_2=t$$

---

4) دیفرانسیل مرتبه‌ی اول $y'+P(x)y=Q(x)$ ←

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right)$$

5) برنولی $y'+P(x)y=Q(x)y^{n}$ ← طرفین در y^{-n} ضرب می‌کنیم

→ " تغییر متغیر $y^{1-n}=u$ "

6) ریکاتی $y'+P_2(x)y^2+P_1(x)y=Q(x)$

اگر y_1 جواب خصوصی باشد ← $y=y_1+\frac{1}{u}$

---

7) دیفرانسیل کامل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

کامل است اگر و تنها اگر $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$

$$\begin{cases} f(x,y)=\int P(x,y)\,dx+g(y)\\ Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\end{cases}$$

8) عامل انتگرال‌ساز :

- 1) $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ← وابسته به y نباشد
- 2) $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{-1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ ← وابسته به x نباشد

Scanned by CamScanner

8) عامل انتگرال ساز

* ضرایب را در عامل انتگرال ساز

کنار می‌گذاریم

3 - $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ← همگن

$\hookrightarrow \mu(x,y) = \dfrac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$

4 - P و Q فقط توان های x و y باشند → $\mu(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$

5 - $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ، $\mu = \mu(z)$ ، $z = z(x,y)$

$\hookrightarrow \dfrac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x} Q(x,y) - \dfrac{\partial z}{\partial y} P(x,y)}$

مسیر های متعامد خانواده‌ی خم های تک پارامتری

1) معادله دیفرانسیل خانواده داده شده را می‌نویسیم (مشتق و حذف c)

2) $y' \rightarrow -\dfrac{1}{y'}$

3) حل معادله

فرمول روش تکرار پیکارد (تقریب های متوالی)

$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0$

$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt \qquad (n \geq 0)$

استفاده از جملات قبل

~~(* دو قضیه‌ی ص ۳۹ جزوه)~~ ← حذف

1 - حذف a بین $f(x,y,a) = 0$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$

2 - حذف a بین $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ ، $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

پوش

3 - گام ۱ در 2 ظاهر شود ← پوش و ظاهر نشود ← استثنائی

Scanned by CamScanner

معادلاتی که نسبت به مشتق حل شده اند

حل شده اند $\longrightarrow y' = f(x, y)$

1) معادله‌ی کلرو $y = xy' + f(y')$ $\longleftarrow$ $y' = p$ $\xrightarrow{\text{مشتق}}$ x ÷

$\frac{dp}{dx} = 0 \longrightarrow c = p \longrightarrow$ جواب عمومی و جواب‌های دیگر استثنائی

2) معادله‌ی لاگرانژ $y = xf(y') + g(y') \longleftarrow y' = p \xrightarrow{\text{مشتق}} x$

روش کاهش مرتبه
$$(1)\quad f(y, y', y'') = 0 \longrightarrow y' = p$$
$$(2)\quad f(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) \longrightarrow y^{(n-1)} = p$$

* قضایای ص 53 حفظ شود

رونسکی :
$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

* $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ $\xleftarrow{\text{اگر}}$ $y_1, \ldots, y_n$ وابسته خطی باشند

* قضایای ص 55 , 56

نوشتن معادله‌ی اندیسی (مفسر شاخص، مشخصه)

1) $r \in \mathbb{R}$, ساده $\longrightarrow y = ce^{rx}$

2) $r \in \mathbb{R}$, مکرر (K) $\longrightarrow y = (c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})e^{rx}$

Scanned by CamScanner

3) $r \in$ مختلط، ساده $\rightarrow y = e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx)$

$\hookrightarrow r = a \pm ib \nearrow$

4) $r \in$ مختلط، مکرر $(k) \rightarrow r = a \pm ib$

$\hookrightarrow y = e^{ax}\left[(c_1 + c_2x + \cdots + c_kx^{k-1})\cos bx + (c_{k+1} + c_{k+2}x + \cdots + c_{2k}x^{k-1})\sin bx\right]$

تضعیف کاهش مرتبه - روش تغییر ثابت - روش تغییر پارامتر

$* \; y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ — جواب خصوصی $y_1 \neq 0$

(مستقل) $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$

جواب عمومی $y = c_1y_1 + c_2y_2$

جمع ضرایب $= 0$

$\hookrightarrow y_1 = e^{x}$

$P(x) = 1 + Q(x)$

$\hookrightarrow y = e^{-x}$

روش لاگرانژ - روش تغییر ثابت ها - روش تغییر پارامترها

جواب خصوصی y_2, y_1 ، $y'' + p(x)y' + Q(x)y = R(x)$

$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot R(x)dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot R(x)dx}{W(y_1, y_2)}$

جواب عمومی : $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$

Scanned by CamScanner

روش ضرایب نامعین برای حل معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

1) $f(x)$ ← درجه‌ی m $\longrightarrow$ P_m ، s ← تعداد ریشه‌های صفر در معادله‌ی اندیسی

$\hookrightarrow y_p = x^s P_m(x)$

2) $f(x) = e^{ax} p(x)$ ، s ← تعداد ریشه‌های a در معادله‌ی اندیسی

$p(x)$ ← درجه‌ی m

$$y_p = x^s e^{ax} P_m(x)$$

3) $f(x) = P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx$

$m = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ ، s ← تعداد ریشه‌های ib

$$y_p = x^s \left(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$$

4) $f(x) = e^{ax}\left(P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx\right)$

$m = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ ، s ← تعداد ریشه‌های $a+ib$

$$y_p = x^s e^{ax}\left(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right)$$

5) ترکیب حالات بالا ← $y_p = y_{p_1} + \cdots + y_{p_n}$

روش عملگرها برای حل معادلات خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

خطی مرتبه‌ی اول

$$a_n(D - r_1)\,u_1 = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$\cdots(D - r_n)\,y$$

خطی همگن مرتبه‌ی دوم: $y'' + P(x)y' + Q(x)y$ ← اگر ثابت باشد

$$\frac{Q'(x) + 2P(x)Q(x)}{(Q(x))^{3/2}} \longrightarrow t = Q(x) = k\int\sqrt{Q(x)}\,dx$$

Scanned by CamScanner

معادله‌ی اویلر کوشی

$$a_n (Ax+B)^n y^{(n)} + \dots + a_1 (Ax+B) y' + a_0 y = 0$$

تغییر متغیر: $y = (Ax+B)^r \longleftrightarrow e^t = Ax+B$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم کامل:

$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = Q(x)$ * کامل است اگر و تنها اگر

$$f''(x) - g'(x) + h(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)y' + T(x)y \right) = Q(x)$$

$$g(x) - f'(x) = T(x)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن

شرط: $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x, y, y', y'')$

⟶ تغییر متغیر: $y = e^{\int u(x)\,dx}$

Scanned by CamScanner